

Méthodes symboliques pour l'étude de systèmes linéaires d'équations différentielles et de récurrences

Barkatou Moulay, moulay.barkatou@unilim.fr

Tél : 033555457383

Cluzeau Thomas, thomas.cluzeau@unilim.fr

Tél : 033587506774

Equipe : CF, Limoges

Mots clés : Calcul formel, algorithmique, équations différentielles, équations de récurrences

Résumé de la thèse :



Cette thèse porte sur le développement de méthodes symboliques pour l'étude des systèmes de la forme

$$Y_n(x)' = A_n(x) Y_n(x),$$

$$Y_{n+1}(x) = B_n(x) Y_n(x),$$

où $A_n(x)$ et $B_n(x)$ sont deux matrices données de fonctions de x et de n et $Y_n(x)$ est le vecteur de fonctions inconnues de x et de n .

Une première partie des travaux portera sur l'étude théorique et le calcul explicite des solutions locales (séries solutions au voisinage d'un point) de tels systèmes. L'étude de l'asymptotique des séries solutions (propriétés de convergence,...) sera aussi abordé. Une deuxième partie se propose de développer des algorithmes pour le calcul de solutions globales (polynomiales, rationnelles, hyperexponentielles) de ces systèmes. Finalement, nous nous intéresserons à l'application des résultats précédents (en particulier du calcul de solutions globales) pour développer des algorithmes de simplification (décomposition, réduction, ...) de tels systèmes. Les algorithmes développés seront implantés dans un logiciel de Calcul Formel (eg., Maple).



This work concerns the development of symbolic methods for the study of systems of the form

$$Y_n(x)' = A_n(x) Y_n(x),$$

$$Y_{n+1}(x) = B_n(x) Y_n(x),$$

where $A_n(x)$ and $B_n(x)$ are two given matrices which entries are functions of x and n , and $Y_n(x)$ is a vector of unknown functions depending on x and n .

The first part will consist in the theoretical study and the effective computation of local solutions (series) of such systems. The asymptotic study of the series solutions will be also considered. The second part concerns the development of algorithms for computing global solutions (polynomial, rational, hyperexponential) of such systems. Finally, we will be interested in the application of the previous results (in particular the computation of rational solutions) in order to develop algorithms for simplifying (decomposing, reducing, ...) such systems. The algorithms will be implemented in a computer algebra software (e.g., Maple).

Objectifs :

Nouvelles méthodes de résolution locales et globales de systèmes linéaires d'équations différentielles et de récurrences ; production logicielle d'utilitaires de résolution ; applications de ces méthodes.

Description complète du sujet de thèse :

L'étude des équations fonctionnelles, c'est-à-dire d'équations dont les inconnues sont des fonctions d'une ou plusieurs variables indépendantes qui peuvent être des variables continues ou discrètes, occupe une place importante au sein des mathématiques et a des applications dans de nombreux domaines scientifiques (chimie, physique, mécanique, . . .). Des classes importantes de telles équations sont les équations différentielles, les équations aux dérivées partielles ou encore les équations aux (q)-différences. Beaucoup d'études théoriques et algorithmiques existantes portent sur

- des systèmes d'équations différentielles linéaires de la forme

$$(S1) \quad Y(x)' = A(x) Y(x),$$

où $A(x)$ est une matrice donnée de fonctions de la variable continue (réelle ou complexe) x , $Y(x)$ est le vecteur de fonctions inconnues de la variable x , et ' désigne la dérivée par rapport à x ;

- des systèmes d'équations de récurrences linéaires de la forme

$$(S2) \quad Y_{\{n+1\}} = B_n Y_n,$$

où B_n est une matrice donnée de fonctions (suites) de la variable discrète n et Y_n est le vecteur de fonctions (suites) inconnues de la variable n .

En particulier, les membres de l'équipe Calcul Formel ont obtenu de nombreux résultats et ont développé et implanté dans des logiciels de Calcul Formel

de nombreux algorithmes pour le calcul de solutions locales (e.g., séries ou séries généralisées) et globales (e.g., solutions sous forme close - solutions polynomiales, rationnelles, exponentielles, hypergéométriques) de systèmes de la forme (S1) ou (S2). Une autre partie des travaux développés dans l'équipe Calcul Formel porte sur des algorithmes permettant de "simplifier" les équations des systèmes de la forme (S1) et (S2) (e.g., en appliquant des changements de variables de la forme $Y=PZ$, où Z est le nouveau vecteur de fonctions inconnues) pour pouvoir obtenir aisément des informations sur le système simplifié qui n'étaient pas visibles sur le système d'origine.

Le sujet de thèse que nous proposons s'inscrit dans la continuation de tels travaux. L'objectif est de développer et d'implanter dans un logiciel de Calcul Formel des algorithmes pour l'étude de systèmes d'équations fonctionnelles linéaires où l'inconnue est un vecteur de fonctions de deux variables x et n vérifiant à la fois un système d'équations différentielles linéaires de la forme (S1) et un système d'équations de récurrences linéaires de la forme (S2). Autrement dit, on se propose d'étudier des systèmes de la forme

$$(S1\&2) \quad Y_n(x)' = A_n(x) Y_n(x) \ \& \ Y_{\{n+1\}}(x) = B_n(x) Y_n(x),$$

où $A_n(x)$ et $B_n(x)$ sont deux matrices données de fonctions de x et de n et $Y_n(x)$ est le vecteur de fonctions inconnues de x et de n .

Un tel système est dit intégrable si les matrices $A_n(x)$ et $B_n(x)$ satisfont la condition

$$(CI) \quad A_{\{n+1\}}(x) B_n(x) - B_n(x) A_n(x) = B_n(x)'$$

Ce type de situation apparaît effectivement dans certaines applications. On peut faire l'analogie avec les familles classiques de polynômes orthogonaux (comme par exemple les polynômes de Legendre) ou certaines fonctions spéciales qui vérifient à la fois une équation différentielle linéaire et des formules de récurrences linéaires. En particulier, dans cette thèse nous développerons des algorithmes pour le calcul de solutions locales et globales de tels

systèmes, pour la simplification des équations (décomposition, réduction,...). Un point de départ pourra être les travaux développés au sein de l'équipe Calcul Formel pour l'étude de connexions intégrables de la forme $dY(x,y)/dx = A(x,y) Y(x,y)$ & $dY(x,y)/dy = B(x,y) Y(x,y)$.

Compétences à l'issue de la thèse :

Mathématiques, Calcul Formel, Algorithmique, modélisation mathématique et applications.

Présentation de l'équipe d'accueil :

Équipe Calcul Formel de l'axe MATHIS. Les membres de l'équipe développent de nouvelles méthodes de calcul permettant d'obtenir des représentations symboliques exactes et des informations qualitatives certifiées pour les solutions d'équations différentielles, polynomiales et plus généralement fonctionnelles. Nos techniques donnent lieu à des réalisations logicielles ; elles complètent les méthodes purement numériques pour la modélisation et la résolution concrète de problèmes scientifiques.

Financement : Lot1: Sujet financé sur crédits institutionnels (sujets fléchés)

Spécialité de Doctorat : Mathématiques et leurs Interactions

Domaine de compétences principal: Mathématiques

Domaine de compétences secondaire: Sciences pour l'Ingénieur

Candidat :

Compétences souhaitées : Être titulaire d'un Master en Mathématiques ou Mathématiques/Informatique. Des compétences en algèbre et calcul formel sont souhaitables.

Conditions restrictives de candidature : Aucune

Date Limite de candidature : 8 Juin 2017 - 18h