

## Méthodes symboliques pour l'étude des équations algébro-différentielles

Barkatou, Moulay, moulay.barkatou@unilim.fr

Tél : 033555457383


Cluzeau, Thomas, thomas.cluzeau@unilim.fr

Tél : 033587506774

Equipe : CF, Limoges


**Mots clés :** Calcul formel, algorithmique, équations différentielles, singularités, équations algébro-différentielles, algèbre linéaire, algèbre différentielle

### Résumé de la thèse :

 Cette thèse porte sur le développement de méthode symbolique pour l'étude d'équations différentielles de la forme  $F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ , où  $y$  est un vecteur de fonctions inconnues. Le sujet comporte essentiellement deux parties :

- La première partie sera dédiée au cas linéaire et plus particulièrement à l'étude et au calcul de toutes les solutions formelles (régulières et non-régulières) d'un système explicite au voisinage d'un point singulier. Pour ce faire, nous envisageons de généraliser les concepts et les algorithmes de réductions locales connus dans le cas des systèmes différentiels de premier ordre (e.g., Moser réduction, super-réduction, systèmes simples, polygone de Newton, ...) au cas des systèmes différentiels d'ordre arbitraire.

- La deuxième partie portera sur le cas des équations algébro-différentielles non-linéaires. Deux approches seront explorées : la première consiste à linéariser le système non-linéaire et utiliser les méthodes de découplage connues pour le cas linéaire. La deuxième se basera sur des techniques d'algèbre différentielle (e.g., élimination différentielle, Thomas decomposition, Rosenfeld-Groebner algorithm,...) et nous focaliserons en particulier sur l'étude des différentes notions d'indice attaché à ce type de système et leur calcul effectif.

 This work concerns the development of symbolic methods for the study of differential equations of the form  $F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  where  $y$  is a vector of unknown functions. It is divided into two main parts:

- The first part deals with the linear case. The aim is to develop algorithms for computing a fundamental system of formal solutions (regular or non-regular) of explicit systems around a singular point. To achieve this goal, we will generalize to higher order explicit differential systems the concepts and algorithms known for the first order case (Moser reduction, super-reduction, simple systems, Newton polygon, ...).

- The second part concerns non-linear differential algebraic equations. Two approaches will be explored: the first one consists in linearizing the non-linear system and applying decoupling techniques developed for the linear case. The second approach will rely on differential algebra techniques (e.g., differential elimination, Thomas decomposition, Rosenfeld-Groebner algorithm, ...). We focus on the study of the various notions of differential indices and their effective computation.

### Objectifs :

Nouvelles méthodes de résolution locales et globales de systèmes différentiels linéaires et non-linéaires ; production logicielle d'utilitaires de résolution ; applications de ces méthodes.

## **Description complète du sujet de thèse :**

L'étude des équations différentielles occupe une place importante au sein des mathématiques et a des applications dans de nombreux domaines scientifiques (chimie, physique, mécanique, . . .). Dans la plupart des études théoriques, on considère des équations données sous une forme explicite (résolue)  $y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ . Cependant dans les applications, ces équations apparaissent souvent sous une forme implicite c'est-à-dire  $F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ . Une classe importante de telles équations est celle des équations différentielles linéaires d'ordre arbitraire  $A_n(t) y^{(n)}(t) + \dots + A_1(t) y'(t) + A_0(t) y(t) = f(t)$ , où  $y$  est un vecteur de fonctions inconnues et les  $A_i$  sont des matrices carrées de fonctions analytiques de la variable complexe  $t$ .

La thèse de Carole El Bacha (préparée et soutenue en 2011 au sein de l'équipe Calcul Formel) traite principalement du cas explicite où la matrice  $A_n(t)$  est inversible (i.e.,  $\det(A_n(t))$  n'est pas identiquement nul).

Nous avons notamment développé des algorithmes pour le calcul de solutions formelles régulières au voisinage d'un point singulier  $t_0$  (i.e., d'un point tel que  $\det(A_n(t_0)) = 0$ ). De plus, nous avons donné des méthodes pour découpler un système différentiel implicite en un système différentiel explicite et un système algébrique.

Le nouveau sujet de thèse que nous proposons s'inscrit dans la suite de ce travail et comportera essentiellement deux parties :

- La première partie sera dédiée à l'étude et au calcul de toutes les solutions formelles (régulières et non-régulières) d'un système explicite au voisinage d'un point singulier. Pour ce faire, nous envisageons de généraliser les concepts et les algorithmes de réductions locales connus dans le cas des systèmes différentiels de premier ordre (e.g., Moser réduction, super-réduction, systèmes simples, polygone de Newton, ...) au cas des systèmes différentiels d'ordre arbitraire.
- La deuxième partie portera sur le cas des équations algébro-différentielles non-linéaires. Deux approches seront explorées: la première consiste à linéariser le système non-linéaire et utiliser les méthodes de découplage connues pour le cas linéaire. La deuxième se basera sur des techniques d'algèbre différentielle (e.g., élimination différentielle, Thomas decomposition, Rosenfeld-Groebner algorithm,...) et nous focaliserons en particulier sur l'étude des différentes notions d'indice attaché à ce type de système et leur calcul effectif.

Ce travail fera l'objet de collaborations avec un partenaire libanais (Carole El Bacha, Université Libanaise, Beyrouth) et un partenaire anglais (Daniel Robertz, Plymouth University).

Des extensions de ces travaux au cas de systèmes d'équations aux différences sont envisageables.

## **Compétences à l'issue de la thèse :**

Mathématiques, Calcul Formel, Algorithmique, modélisation mathématique et applications.

## **Présentation de l'équipe d'accueil :**

Équipe Calcul Formel du DMI. Les membres de l'équipe développent de nouvelles méthodes de calcul permettant d'obtenir des représentations symboliques exactes et des informations qualitatives certifiées pour les solutions d'équations différentielles, polynomiales et plus généralement fonctionnelles. Nos techniques donnent lieu à des réalisations logicielles ; elles

complètent les méthodes purement numériques pour la modélisation et la résolution concrète de problèmes scientifiques.

**Financement :** Lot1: Sujet financé sur crédits institutionnels (sujets fléchés)

**Spécialité de Doctorat :** Mathématiques et leurs Interactions

**Domaine de compétences principal:** Mathématiques

**Domaine de compétences secondaire:** Sciences pour l'Ingénieur

**Candidat :**

**Compétences souhaitées :** Être titulaire d'un Master en Mathématiques ou Mathématiques/Informatique. Des compétences en algèbre et calcul formel sont souhaitables.

**Conditions restrictives de candidature :** Aucune

**Date Limite de candidature :** 4 Juin 2016 - 18h